REMARQUES SUR LE CALCUL

DES

PERTURBATIONS SPÉCIALES DES PETITES PLANÈTES,

Par Jean BOCCARDI,

a Catania.

Messieurs,

Je n'ai pas l'intention de proposer quelque modification à la théorie des perturbations spéciales qu'éprouvent les petites planètes, mais seulement de donner aux calculateurs d'orbites quelques conseils, dont l'expérience m'a montré l'utilité pratique (¹). Je n'attirerai votre bienveillante attention que pendant quelques minutes.

Tout le monde connaît les trois méthodes pour le calcul des perturbations spéciales par quadratures mécaniques, c'est-à-dire : la méthode d'Encke, celle de Hansen-Tietjen et celle de la variation des constantes. Évidemment chacune de ces méthodes présente des avantages, mais comme je me suis placé sur le terrain de la pratique, pour ce qui concerne les petites planètes, je crois pouvoir affirmer que la véritable méthode à suivre est celle de la variation des éléments.

La méthode d'Encke est très utile lorsqu'il s'agit de calculer les perturbations pour un court laps de temps, ce qui fait qu'elle est tout indiquée pour les comètes; mais pour suivre une planète pendant plusieurs oppositions, elle n'est plus suffisamment exacte, et d'ailleurs, il est difficile de reconnaître les fautes de calcul qui s'y seraient glissées, et qu'il n'est pas facile d'éviter.

La méthode de Hansen-Tietjen dans laquelle on emploie les coordonnées polaires, élégante pour l'enseignement et commode pour les calculs, présente aussi des inconvénients dès qu'il s'agit d'étendre le calcul à un long

(¹) Dans quelques mois, cent ans se seront écoulés depuis l'époque où Piazzi découvrait Cérès, la première des petites planètes; puisse cette Communication être un faible hommage à la mémoire de mon illustre compatriote!

laps de temps. La méthode de Lagrange, très simple dans son exposition, facile pour les calculs, se prête très bien aux vérifications, ce qui fait que, tout en exigeant des calculs un peu plus longs que les deux autres méthodes, en définitive elle nous conduit plus rapidement au but proposé. Dès qu'on a déterminé une première orbite d'une petite planète au moyen des observations d'une opposition, on a besoin de calculer les perturbations jusqu'à l'opposition suivante, afin de pouvoir dégager les observations, et ainsi corriger les éléments primitifs [1]. On voit qu'il n'est aucunement nécessaire d'osculer à une date intermédiaire entre la première et la seconde opposition, ces planètes n'étant observées qu'aux environs des oppositions, c'est-à-dire pendant un mois, et dans ce court intervalle l'effet des perturbations étant presque nul. Par conséquent, on peut s'épargner d'additionner les différentielles de proche en proche, comme si on voulait osculer pour chacune des dates intermédiaires. Il est peut-être utile d'avoir égard à la présence de la Lune sur l'horizon, afin que l'osculation ait lieu à une époque à laquelle les observations pourront se faire plus facilement.

Pour ce qui concerne la mise en train des calculs, on recommande généralement de se servir des Tables publiées par Tietjen (*Veröffentlichungen des Rechen-Instituts zu Berlin,* N° 1) qui permettent de déduire de l'anomalie moyenne M l'anomalie v, sans passer par l'anomalie excentrique E. Ces tables, assez compliquées, d'ailleurs, donnent les anomalies vraies à $2''$ ou $3''$ près, ce qui est plus que suffisant pour le calcul des perturbations, qui se fait à 5, ou même parfois à 4 décimales. Cependant si j'osais exprimer mon opinion, je dirais que les Tables de Tietjen sont très avantageuses lorsqu'il s'agit de trouver l'anomalie vraie pour quelque lieu isolé; mais dès qu'il s'agit d'une série de lieux, comme il arrive dans le calcul des perturbations spéciales, il est plus pratique de calculer toutes les E et de passer tout de suite aux v par les formules connues :

$$M = E - \varepsilon'' \sin E, \qquad r \sin v = a \cos\varphi \sin E, \qquad r \cos v = a(\cos E - \sin\varphi),$$

(1) Certains astronomes, je le sais, se contentent d'une orbite approchée, qui, loin de coïncider avec tous les lieux observés durant une révolution entière de l'astre, ne fait que les toucher à peu près. Ils négligent totalement les perturbations, parce qu'ils comptent sur une compensation sérieuse. A mon avis, ce n'est là qu'un palliatif; on veut éviter de longs calculs; mais ce procédé ne pourrait pas suffire pour un long laps de temps. Pour que les planètes ne nous échappent pas, il faut enfin calculer, au moins, les perturbations générales, avec les méthodes de Gyldén, qui exigent une orbite exacte. Donc, il vaut mieux, je pense, calculer les perturbations et représenter exactement les lieux dès les premières oppositions.

en employant les logarithmes d'addition là où il y a lieu. Il n'y a que les deux premières valeurs de E répondant aux deux premieux lieux de la série, qui exigent quelque tâtonnement, mais ensuite, en formant les différences des différents ordres, on obtient immédiatement des valeurs très approchées de E. On peut faire ce calcul avec 6 décimales en s'arrêtant cependant à la seconde ronde ou bien à 5 décimales en allant jusqu'aux centièmes de minute. Il est vrai que quelquefois on calcule les perturbations de 80 en 80 jours pour Saturne, et alors les différences première, seconde, troisième des E ne suffisent pas pour obtenir une valeur approchée des E suivantes; mais comme on doit calculer aussi les perturbations par l'action de Jupiter, où le calcul se fait tout au plus de 40 en 40 jours, on voit qu'alors la marche des différences est très régulière. L'avantage principal de ce calcul des v en passant par les E, est qu'alors on possède toutes les quantités dépendant des éléments de la planète perturbée, dont on a besoin dans le calcul des dérivées des éléments, c'est-à-dire : $u = v + \omega$, r, $\sin v$, $\cos v$, $\cos E$. Tandis qu'en se servant des *Tables de Tietjen*, après avoir obtenu v, il faut calculer r par la formule :

$$r = \frac{a \cos^2 \varphi}{1 + \sin \varphi \cos v}.$$

Ensuite, comme pour obtenir la dérivée de l'excentricité par rapport à la composante tangentielle S, on a besoin de $\cos E$, puisque :

$$(\varphi : S) = a \cos \varphi (\cos v + \cos E),$$

on est obligé de le calculer par

$$\cos e = \frac{\cos v + \sin \varphi}{1 + \sin \varphi \cos v}.$$

On pourrait plus simplement déterminer $\cos E$ par la formule

$$\sin E = \frac{r \sin v}{a \cos \varphi},$$

en calculant $\cos E$ à vue, après avoir trouvé $\sin E$. Or, si l'on a égard à tous ces calculs supplémentaires, on doit convenir qu'il est plus simple de calculer les v en passant par les E.

Pour la même raison je ne conseille pas de calculer les v en les développant en série :

$$v = M + \left(2e - \frac{e^3}{4}\right) \sin M + \left(\frac{5}{4} e^2 - \frac{11}{24} e^4\right) \sin 2M + \ldots;$$

quoique pour les planètes à faible excentricité, cette méthode soit assez

rapide et suffisamment commode, parce qu'on peut, dans toutes les années, se servir des mêmes valeurs des coefficients entre parenthèses, attendu que les perturbations n'altèrent pas beaucoup l'excentricité. Il reste toujours à calculer les autres quantités auxiliaires. Afin d'éviter les tâtonnements dans le calcul des anomalies excentriques, on peut avoir recours aux Tables données par M. Callandreau (*Bulletin astr.*, octobre 1885) ou bien à celles plus étendues publiées par J.-J. Astrand *Hülfstafeln zur Leichten und Genauen Auflösungs des Kepler'schen Problems;* Leipzig, 1890). Du reste, lorsqu'on a calculé les perturbations pour une révolution entière de la planète, on a déjà des valeurs approchées des E pour tous les points de l'orbite, l'effet des perturbations n'étant pas bien sensible sur l'excentricité.

Pour ce qui est des intervalles dans lesquels on partage le temps d'une osculation à l'autre, on adopte ordinairement 40 jours pour Jupiter. Cependant je pense qu'avant d'adopter ces intervalles il convient de s'assurer que les valeurs différentielles soient assez petites, autrement on s'expose à des erreurs de plusieurs secondes sur les intégrales. Pour reconnaître à l'avance si les perturbations seront considérables, on doit avoir égard à la position relative de la petite planète et de Jupiter. Lorsque ces deux planètes sont en conjonction, les différentielles relatives au périhélie pour des périodes de 40 jours atteignent quelquefois 120″. Dans ces conditions, il est presque indispensable d'adopter des périodes de 20 jours. Voici un exemple. Ayant calculé les perturbations par l'action de Jupiter sur la planète (347) *Pariana*, avec des périodes de 40 jours, du 15 mars 1898 au 8 juillet 1899, j'avais obtenu les valeurs suivantes :

$$\int \Delta L = +1'.21'',87, \qquad \int \Delta\pi = -12'.14'',70, \qquad \int \Delta\mu = +0'',57284.$$

La distance de Jupiter à *Pariana* varie entre 7,80 et 2,59 et la distance ♁ — ⊙ étant = 1.

Or, en avril 1898, Jupiter et *Pariana* avaient été en conjonction avec une distance minimum de 3,26.

Ceci m'amena à recalculer les perturbations avec des intervalles de 20 jours. J'obtins alors :

$$\int \Delta L = +1'.18'',118, \qquad \int \Delta\pi = -12'.22'',444, \qquad \int \Delta\mu = +0'',56640.$$

Donc le premier calcul, en prenant des périodes de 40 jours, me donnait une erreur de — 3″,985 sur l'anomalie moyenne du 8 juillet. Cette erreur se reportait entièrement sur le lieu géocentrique.

des nombres correspondant aux logarithmes. Ces Tables seraient utiles lorsqu'on résout, par tâtonnements, l'équation de Képler, quand on calcule à 5 décimales des éphémérides des planètes, ce qui se fait assez souvent, par exemple pour les *Genäherte Oppositions-Ephemeriden* du Rechen-Institut.

Enfin les Tables de Schrön sont excellentes ; cependant le calcul des sinus et des tangentes pour les arcs de 0° à 6° ne s'y fait pas commodément. Sous ce rapport les Tables de Bruhns sont préférables.

Un autre *desideratum* serait que dans le Tableau abrégé des coordonnées héliocentriques des grosses planètes, destiné au calcul des perturbations et donné par la *Connaissance des Temps* et par le *Berliner Jahrbuch*, au lieu de donner les coordonnées susdites pour 0 heure, on les donnât pour 12 heures. On sait en effet que les éphémérides des planètes se calculent pour minuit moyen et que, ordinairement, l'anomalie moyenne pour la date de l'osculation est donnée aussi pour minuit ; tandis que, dans le calcul des perturbations, on doit prendre les anomalies à 0 heure, afin qu'elles correspondent aux dates des coordonnées héliocentriques. Cela est assez souvent une cause d'erreur.

Enfin, mon dernier vœu serait que les astronomes observateurs donnassent un peu plus de place aux observations des petites planètes. Souvent, après avoir travaillé beaucoup à corriger une orbite et à donner une éphéméride pour l'opposition, on a la douleur d'apprendre que la planète n'a pas été observée, parce qu'elle n'a pas été cherchée. Et cependant il y a deux cents équatoriaux qui sont dirigés vers le ciel toutes les fois que l'état de l'atmosphère le permet! Peut-être on ferait mieux d'observer moins souvent les anciennes petites planètes, *Cérès, Pallas, Vesta,* dont la théorie est faite depuis trente ou quarante ans; il resterait alors du temps pour l'observation des planètes récentes.

Voilà, Messieurs, les vœux que j'ose exprimer devant les Maîtres de la Science, afin qu'on vienne en aide aux esprits dont on peut dire que *leur verre n'est pas grand.*

(Communication faite à la Section de Mécanique du Congrès international des Mathématiciens. Paris, 1900.)

30142 Paris, Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.